



## CONFIABILIDADE PRESCRITA EM CONSTRUÇÕES DE MÁQUINAS SOB OSCILAÇÕES ALEATÓRIAS

**Anvar Midhatovich Araslanov**

UETK – Kazan, Russia

GPMA - UCS – CAMVA – Vacaria - RS – Brasil

[anvar2@fpp.kstu-kai.ru](mailto:anvar2@fpp.kstu-kai.ru)

**Maria Emilia Camargo**

DCSC – UCS – CAMVA – Vacaria - RS - Brasil

[kamargo@zaz.com.br](mailto:kamargo@zaz.com.br)

**Walter Priesnitz Filho**

DCSC – UCS – CAMVA – Vacaria - RS - Brasil

[walterp@via-rs.net](mailto:walterp@via-rs.net)

**Angela Isabel dos Santos**

Depto de estatística – UFSM – Santa Maria – RS

[dr\\_angel@zaz.com.br](mailto:dr_angel@zaz.com.br)

### RESUMO

Neste trabalho procura-se resolver o problema do cálculo de construção de máquinas com confiabilidade prescrita sob as oscilações aleatórias da construção. A solução das equações das oscilações dos sistemas elásticos é apresentada na forma de decomposição por oscilações próprias. Para a determinação da densidade espectral da coordenada generalizada utilizou-se as relações conhecidas entre as densidades espectrais da “entrada” e “saída” do sistema linear. Obteve-se as relações para a determinação das variâncias de “saída”, sua primeira derivada e a frequência “efetiva” do sistema. Considerou-se o caso geral, quando a carga varia por ciclo assimétrico. Utilizou-se a teoria linear da acumulação dos defeitos da fadiga e foi apresentado a aplicação do cálculo.

Palavras-Chave: Métodos Probabilísticos; Confiabilidade; Oscilações Aleatórias

### ABSTRACT

The objective of this paper is to solve the calculation problem of machine construction with reliability prescribed under the random oscillations. The solution of the oscillation equations of system elasticity is in a decomposition form of self-oscillations. To determine the spectral density of general coordination known relations between the "input" and "output" spectral density of the linear system are used. The relations needed to determine the variance of output, its first derivative and the effective frequency of the system are obtained. A general case is being considered, that is, when load changes within an asymmetric cycle. The linear theory of accumulation of defects of fatigue is used and applications of the calculation are presented.

Key words: Probability Methods, Reliability, Random Oscillations.

## 1. INTRODUÇÃO

A última etapa do cálculo de qualquer construção de máquinas é a determinação da confiabilidade da construção e a comparação com a confiabilidade necessária. Por isso, o problema de colocar a confiabilidade necessária na construção projetada é muito importante. Anteriormente, este problema já foi considerado por Araslanov, (1974), mas o caráter de variações das cargas aleatórias permitia ignorar as forças de inércia. Neste trabalho, procura-se resolver este problema sob oscilações aleatórias, considerando as forças de inércia para construções, cujas dimensões são determinadas por um parâmetro. Este trabalho segue a seguinte estrutura: na seção 2, é apresentado o desenvolvimento da metodologia; a seção 3 contém os principais resultados encontrados. Finalmente, na seção 4 são apresentadas as principais conclusões do trabalho.

## 2. DESENVOLVIMENTO

Sejam as oscilações do sistema elástico descritas pela equação (Nicolaenco, 1964):

$$L[p, w(x, y, z, t)] - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, z, t)$$

onde  $w(x, y, z, t)$  é o deslocamento dinâmico dos pontos do sistema;  $m$  é a massa do volume elementar;  $L[p, w(x, y, z, t)]$  são os operadores diferenciais lineares em derivadas parciais, os quais têm a forma:

- Para a barra:  $L[p, w(x, t)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(u + iv) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$ , onde  $EJ$  é a rigidez de barra.

- Para a placa retangular:  $L[p, w(x, y, t)] = D(u + iv) \nabla^2 \nabla^2 w$ , onde  $D$  é a rigidez cilíndrica, e  $\nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right)$ .

- Para o envelope cilíndrico:  $L[p, w(x, y, t)] = \left[ \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] (u + iv)$ ,

onde  $h$  é a espessura do envelope,  $R$  é o raio e " $u$ " e " $v$ " são os parâmetros do amortecimento por hipótese de Sorokin:

$$u = \frac{4 - \gamma^2}{4 + \gamma^2}; \quad v = \frac{4\gamma}{4 + \gamma^2}; \quad \gamma = \frac{\delta}{\pi}, \quad \text{onde } \delta \text{ é o decréscimo logarítmico do amortecimento e}$$

$q(x, y, z, t)$  é a carga casual exterior.

Representado a solução na forma da decomposição por formas de oscilações naturais, tem-se:

$$w(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \zeta_j(t) w_j(x, y, z), \quad \text{onde } w_j(x, y, z) \text{ é a forma principal e } \zeta_j(t) \text{ é a}$$

coordenada generalizada. A determinação da coordenada generalizada  $\zeta_j(t)$  pode ser obtida através de:

$$\ddot{\zeta}_j(t) + (u + iv)\omega_j^2 \zeta_j(t) = \frac{1}{M_j} Q_j(t), \quad (1)$$

onde  $M_j$  é a massa generalizada,  $Q_j(t)$  é a carga generalizada e  $\omega_j$  é a frequência das oscilações naturais para a  $j$ -ésima forma.

$$M_j = \iiint_V m w_j^2(x, y, z) dV, \quad Q_j(t) = \iint_S q(x, y, z, t) w(x, y, z) dS$$

É conhecido que, para sistemas lineares, a ligação entre as densidades espectrais de "entrada" e "saída" do sistema, no nosso caso, ligação entre a densidade espectral da força generalizada  $Q_j(t)$  e a densidade espectral da coordenada generalizada  $\zeta_j(t)$ , é determinada pela fórmula:

$$\Phi_{\zeta_j \zeta_j}(\omega) = |H_j(i\omega)|^2 \Phi_{Q_j Q_j}(\omega) \quad (2)$$

onde no caso em estudo,

$$H_j(i\omega) = \frac{1}{M_j[-\omega^2 + (u + iv)\omega_j^2]}. \quad (3)$$

Assim, para a variância da coordenada generalizada da  $\zeta_j(t)$  obtém-se:

$$\sigma_{\zeta_j}^2 = \frac{1}{M_j^2} \int_0^\infty \frac{\Phi_{Q_j Q_j}(\omega) d\omega}{\omega^4 - 2u\omega_j^2\omega^2 + \omega_j^4}. \quad (4)$$

Para a determinação da variância de deslocamentos dinâmicos  $w(x, y, z, t)$  pode-se utilizar a decomposição em oscilações naturais e pela média do conjunto das realizações.

Supondo que as forças generalizadas não são correlacionadas, obtém-se:

$$\sigma_w^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{\zeta_j}^2 w_j^2(x, y, z) \quad (5)$$

Analogamente, para a variância do momento da flexão em seção de barra (M) e a variância da tensão (S) tem-se:

$$\sigma_M^2(x) = EJ_z \sum_{j=1}^n \sigma_{\zeta_j}^2 \left[ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right]^2 \quad (6)$$

$$\sigma_S^2(x) = \left( \frac{EJ_z}{W_z} \right)^2 \sum_{j=1}^n \sigma_{\zeta_j}^2 \left[ \frac{d^2 w_j(x)}{dx^2} \right]^2 \quad (7)$$

Assim, pode-se observar que  $\sigma_S^2(x)$  depende das características probabilísticas da carga e das dimensões da seção transversal da construção.

### 3. RESULTADOS

Neste trabalho, foi considerado o caso geral, quando a carga varia por ciclo assimétrico, com base nos trabalhos de Araslanov (1974), Bolotin (1965), Cerencen et al. (1963) e Weibull (1964), através da utilização da teoria linear da acumulação dos defeitos da fadiga, quando as tensões são representadas por um processo estacionário normal com faixa estreita e com a distribuição de Weibull

como lei de distribuição de limite da fadiga. Assim, é deduzida a seguinte fórmula para determinação da confiabilidade.

$$H = \exp \left[ - \frac{\left( \sigma_s \sqrt{\frac{T}{T_e N_0}} \Psi(m+2) + \psi m_s - R_{-10} \right)^\gamma}{R_e} \right] \quad (8)$$

onde  $N_0$  e  $m$  são os parâmetros da curva da fadiga;  $T$  é o tempo de serviço;  $\psi$  é o coeficiente de dedução ao ciclo simétrico e  $\Psi$  é determinado por:

$$\Psi(m+2) = 2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right); \quad (9)$$

$T_e$  é o período efetivo que é determinado por:

$$T_e = 2\pi \frac{\sigma_s}{\sigma_s}; \quad (10)$$

$R_{-10}$ ,  $R_e$  e  $\gamma$  são os parâmetros da distribuição de Weibull.

Para muitos processos físicos reais a função de correlação da carga pode ser aproximada pela fórmula:

$$K_q(\tau) = \sigma_q^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \text{sen}\beta|\tau| \right). \quad (11)$$

Quando  $\alpha, \beta \ll \omega_j$ ,  $T_e$  pode ser escrito como:

$$T_e = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (12)$$

Para outros tipos de funções de correlação, as fórmulas para determinação de  $T_e$  podem ser encontradas na TABELA 1.

TABELA 1 : Fórmulas para determinação do período efetivo  $T_e$

$K(\tau)$	$T_e$
$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{2}}$
$e^{-\alpha^2\tau^2}$	$\frac{2\pi}{\alpha\sqrt{2}}$
$e^{-\alpha \tau } \cos\beta\tau$	$\frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}}$
$e^{-\alpha^2\tau^2} \cos\beta\tau$	$\frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha^2 + \beta^2}}$
$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{2\pi}{\alpha}$
$e^{-\alpha \tau } \left( \cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \text{sen}\beta \tau  \right)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$
$e^{\alpha \tau } \left( \cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \text{sen}\beta \tau  \right)$	$\frac{2\pi}{2\sqrt{2\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau )$	$\frac{2\pi}{\alpha(2\sqrt{2}-1)}$
--	------------------------------------

A equação (8) pode ser representada de uma forma mais simples para a resolução gráfica, através de:

$$R_e \sqrt[3]{- \ln H} + R_{-10} - \psi m_s = \sigma_s m \sqrt{\frac{T}{T_e N_0}} \Psi(m+2) \quad (13)$$

Como  $m_s$  e  $\sigma_s$  dependem das características probabilísticas conhecidas da carga e dos tamanhos procurados da seção transversal, então, a resolução da equação (13) relativa às dimensões fornece a resposta do problema proposto.

Para determinar a variância da tensão e sua derivada é necessário determinar as variâncias das coordenadas generalizadas  $\zeta(t)$  e suas derivadas  $\dot{\zeta}(t)$ , isto é, a da "saída" do sistema e suas derivadas. Designaremos "entrada" do sistema por  $x(t)$  e "saída" por  $y(t)$ . Na prática iremos encontrar mais freqüentemente dois operadores típicos que unem "saída" com a "entrada" do sistema, ou seja:

a) ação da força exterior  $\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = x$  cuja função de resposta em freqüência é dada por:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{|(i\omega)^2 + 2ni\omega + \omega_0^2|^2}$$

b) excitação cinemática (isto é, as oscilações provocadas pelos deslocamentos dos pontos de fixação do elemento da construção)  $\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = 2n\dot{x} + \omega_0^2 x$

sendo a função resposta em freqüência dada por:  $|H(i\omega)|^2 = \frac{4n^2(i\omega)^2 + \omega_0^4}{|(i\omega)^2 + 2ni\omega + \omega_0^2|^2}$

Então:  $\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 \Phi_x(\omega) d\omega$        $\sigma_{\dot{y}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 \omega^2 \Phi_x(\omega) d\omega$

Consideremos alguns casos particulares da função de correlação ( $K_x$ ) da "entrada" e a correspondente função espectral ( $\Phi_x(\omega)$ ).

1)  $k_x = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (\cos \beta \tau)$

$$\Phi_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\pi [(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + m^2]^2}$$

2)  $k_x = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \text{sen} \beta |\tau| \right)$

$$\Phi_x(\omega) = \frac{4\sigma_x^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi|(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + m^2|^2}$$

$$3) k_x = \sigma_x^2 e^{-\alpha|t|}$$

$$\Phi_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi|\alpha + i\omega|^2}$$

Para diferentes combinações dos operadores e funções de correlação da “entrada” foram obtidas as expressões concretas para determinar  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{\dot{y}}$ , e  $\omega_e = \frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}$ .

### 3.1. Aplicação

Para alguns elementos das construções, a carga pode ser a ação acústica casual, a qual pode provocar a destruição da fadiga. Consideramos o cálculo do projeto do painel da asa de um avião. O esquema de cálculo é representado por uma placa retangular com apoios articulados. Os tamanhos das placas são 0.4 m x 0.145 m. A ação exterior casual é a pressão acústica distribuída uniformemente pela placa com  $\mu_q = 0.07$  MPa e  $\sigma_q^2 = 0.225 \times 10^6$  Pa<sup>2</sup>. A densidade espectral tem a forma:

$$\Phi_q(\omega) = \frac{2\sigma_q^2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{128\sigma_q^2}{\pi(64^2 + \omega^2)}$$

Assim, é necessário determinar a espessura da placa h, assim que a confiabilidade seja igual a 0.99 durante  $T = 2.5 \times 10^4$  c. A equação das oscilações forçadas da placa tem a forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{ph}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q(x, y, t)}{D}$$

A solução será determinada através da decomposição de formas das oscilações próprias

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{mn}(t) w_{mn}(x, y),$$

para as quais as condições de apoio dados são escritas na seguinte forma:

$$w_{mn}(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}.$$

Então, para a força e para a massa generalizada tem-se:

$$Q_{mn}(t) = \iint_F q(x, y, t) w_{mn}(x, y) dF = \frac{4abq}{\pi mn} \quad M_{mn} = \iint_F \rho h w_{mn}^2(x, y) dF = \frac{\rho h ab}{4}$$

Para a tensão normal máxima tem-se:

$$S_{xx}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(x, y) \zeta_{mn}(t), \quad S_{yy}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}(x, y) \zeta_{mn}(t),$$

onde,

$$a_{mn}(x, y) = \frac{6D}{h^2} \left[ \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \mu \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}; \quad b_{mn}(x, y) = \frac{6D}{h^2} \left[ \mu \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \text{sen} \frac{m\pi y}{b}.$$

Supondo que o espectro da carga é suficientemente suave em declive e os coeficientes de amortecimento são poucos, a correlação mútua das cargas generalizadas pode ser ignorada.

Então, para a densidade espectral das tensões pode-se escrever:

$$\Phi_{S_{xx}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \Phi_{\zeta_{mn}}(\omega), \quad \Phi_{S_{yy}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^2 \Phi_{\zeta_{mn}}(\omega),$$

onde

$$\Phi_{\zeta_{mn}}(\omega) = \frac{\Phi_{Q_{mn}}(\omega)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta_{mn} \omega_{mn} \omega)^2}$$

e  $\delta_{mn}$  é o coeficiente de amortecimento linear para mn-forma;  $\omega_{mn}$  é a frequência das oscilações por mn-forma.

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}}$$

já que  $\Phi_{Q_{mn}}(\omega) = \frac{256\Phi_q(\omega)}{\pi^2 \rho^2 h^2 m^2 n^2}$ , pode-se obter:

$$\sigma_{S_{xx}}^2 = \frac{128E^2 \sigma_q^2}{\pi^2 \rho^2 (1-\mu^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 2\delta_{mn}) a_{mn}^{*2}}{2\delta_{mn} \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 + 2\delta_{mn}^2 \alpha + \alpha^2)},$$

$$\sigma_{S_{yy}}^2 = \frac{128E^2 \sigma_q^2}{\pi^2 \rho^2 (1-\mu^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 2\delta_{mn}) b_{mn}^{*2}}{2\delta_{mn} \omega_{mn}^2 (\omega_{mn}^2 + 2\delta_{mn}^2 \alpha + \alpha^2)},$$

$$e \quad a_{mn}^* = \frac{a_{mn} h^2}{6D}; \quad b_{mn}^* = \frac{b_{mn} h^2}{6D}.$$

Assim, iremos utilizar:  $\sigma_s \sqrt{\frac{T}{T_e N_0}} \Psi(m+2) + \psi m_s = \gamma + \sqrt{-\alpha \ln H}$ .

No caso em estudo, pode-se tomar:

$$\gamma = 130 \text{MPa}; \alpha = (29.5 \text{MPa})^6; \beta = 6; m = 6; N_0 = 10^7; E = 0.71 \times 10^5 \text{MPa};$$

$$\rho = 2780 \text{kg/m}^3; \mu = 0.3; \psi = 0.28; \Psi(m+2) = 2^{m/2} \left( \frac{m}{2} \right)! = 48.$$

Através da análise realizada, mostra-se que os termos da série decaem rapidamente e pode-se conservar somente o primeiro termo.

$$\text{Assim: } T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha + 2\delta_{11}}{\alpha\omega_{11}^2}}$$

Fazendo  $\delta_{11} = 0.005$ , a expressão para determinar h terá a seguinte forma:

$$\frac{0.19 \times 10^{-5}}{h^{11/6}} + \frac{2.84 \times 10^{-4}}{h^2} = 143.7$$

Logo,  $h = 0.0015$  m.

Esta espessura garante um trabalho sem falha para  $T = 2.5 \times 10^4$  c, com confiabilidade  $H = 0.99$ .

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentou-se uma nova metodologia para resolver o problema do cálculo de construção de máquinas com confiabilidade prescrita sob as oscilações aleatórias da construção. Foi apresentada a solução das equações dos sistemas elásticos através da forma de decomposição por oscilações próprias, bem como a determinação da densidade espectral da coordenada generalizada, utilizando-se as relações conhecidas entre as densidades espectrais da “entrada” e “saída” do sistema linear. Obteve-se as relações para a determinação das variâncias de “saída”, sua primeira derivada e a frequência “efetiva” do sistema.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARASLANOV, A. M.. Cálculo das placas e invólucros com confiabilidade prescrita na base da teoria dos valores aleatórios. **Coletânea de Trabalhos de KAI**. n. 172, 1974, p.4-8.
- BOLOTIN, V. V. **Os métodos probabilísticos na mecânica civil**. Moscou, Eng. Civil, 1965.
- CERENCEN, C. V., COGAEV, V. P., CHNEIDEROVICH, R. M.. **A capacidade portadora e cálculos dos elementos de máquinas na resistência**. Moscou, Construção de Máquinas, 1963.
- NICOLAENCO, N. A.. **Os métodos probabilísticos de cálculo dinâmico das construções**. Moscou, Construção de Máquinas, 1964.
- VENTCEL, E. C.. **Teoria das probabilidades**. Moscou, Ciência, 1964.
- WEIBULL, V.. **Ensaio de fadiga e análise de seus resultados**. Moscou, Construção de Máquinas, 1964.